4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left[\left(\frac{1}{x}+1\right)x\right]}{\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right]=0$ $f(\alpha)=\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}}$ or $g(\alpha)=0=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}-\ln(1+\alpha)\Leftrightarrow\ln(1+\alpha)=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}$

donc $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{(1+\alpha)\sqrt{\alpha}}=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.

III-1) D'après I-4) on a : $g(x)\le 1\Leftrightarrow\dfrac{2x}{1+x}-\ln(x+1)\le 1\Leftrightarrow\dfrac{2x}{1+x}-1\le\ln(x+1)\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x+1}\le\ln(x+1)$.

2)a) On a : $\dfrac{x-1}{x+1}\le\ln(x+1)$ on pose : $x=1+\dfrac{k}{n}$ on aura: $\ln\left(1+1+\dfrac{k}{n}\right)\ge\dfrac{1+\frac{k}{n}-1}{1+1+\frac{k}{n}}\Leftrightarrow\ln\left(2+\dfrac{k}{n}\right)\ge\dfrac{k}{2n+k}$

or 2n + k ≤ 3n donc $\dfrac{1}{2n+k}\ge\dfrac{1}{3n}$ et k est positif $\dfrac{k}{2n+k}\ge\dfrac{k}{3n}$ d'où : $\ln\left(2+\dfrac{k}{n}\right)\ge\dfrac{k}{3n}$.

c) On a : $\ln\left(2+\dfrac{k}{n}\right)\ge\dfrac{k}{3n}\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{k=n}\ln\left(2+\dfrac{k}{n}\right)\ge\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{k}{3n}\Leftrightarrow\ln(u_n)\ge\dfrac{1}{3n}.\dfrac{n(n+1)}{2}\Leftrightarrow\ln(u_n)\ge\dfrac{n+1}{6}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)\ge\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{6}=+\infty$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=+\infty$ *et par suite* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...